Date : / / Subject: ٩٣ — ١٨ / ١١

الفضاء الطبولوجي الجزئي

ليكن (X, τ) فضاء طبولوجي وليكن $A \subseteq X$

هل يمكن تحويل A إلى فضاء طبولوجي وكيف ؟؟

* لنأخذ ما يسمى تطبيق الإدخال :

$$I_A : A \longrightarrow X$$

المعرفة بالصيغة : $I_A(x) = x \quad \forall x \in A$

أي أن التطبيق الإدخال هو مقصور التطبيق المطابق

* إن أضعف طبولوجيا على A تجعل تطبيق الإدخال مستمراً تسمى الطبولوجيا النسبية على A ويرمز لها بـ τ_A وتسمى أحياناً أثر الطبولوجيا τ على A

سؤال :

كيف تبدو المجموعات المفتوحة في الطبولوجيا النسبية $I_A^{-1}(u) = u \cap A$

وبالتالي الطبولوجيا النسبية محملاً هي أسرة المجموعات u بالتقاطع مع A

$$\tau_A = \{u \cap A \;;\; u \in \tau\}$$

* المجموعات المفتوحة في الفضاء الجزئي R :

هي المجموعات الناتجة عن تقاطع المجموعات المفتوحة الموجودة في الفضاء الكلي X مع R

- تكون المجموعة G مفتوحة في الفضاء الجزئي $A \iff$ وجدت مجموعة مفتوحة u في الفضاء الكلي X (أي $u \in \tau$) بحيث $u \cap A = G$ عندئذٍ G مفتوحة

* وبشكل مشابه F مغلقة في $A \iff$ وجدت مجموعة مغلقة H في الفضاء الكلي X بحيث : $H \cap A = F$

* تمرين :

برهن أن : $\tau_A = \{u \cap A \;;\; u \in \tau\}$ طبولوجيا

- لنأخذ أسرة $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ من عناصر τ_A والمطلوب إثبات أن $\cup V_\alpha \in \tau_A$

نبرهن ذلك بالشكل حسب التعريف :

توجد مجموعة مفتوحة U_α في X بحيث : $V_\alpha = U_\alpha \cap A$ ومنه

$$\cup V_\alpha = \cup (U_\alpha \cap A) = \underset{\tau}{(\cup U_\alpha)} \cap A$$

حسب تعريف اجتماع مجموعات مفتوحة هو مجموعة مفتوحة

* $\emptyset \cap A = \emptyset$

Sabbagh

Date : / / Subject:

أي ان τ_A فضاء طبولوجيا $X \cap A = A$.

* أمثلة:

* لنأخذ R الفضاء الطبولوجي ولنأخذ $A = [1, 5]$

كيف نحصل على المجموعات المفتوحة في R؟

هي تقاطع المجموعات المفتوحة في R مع A لو أخذنا على وجه $u =]0, 3[$

حيث نعرف $u \cap A = [1, 3[$ يجب ان يكون مجموعة مفتوحة في A

نلاحظ:

ان المجموعات المفتوحة في الفضاء الجزئي ليس من الضروري ان تكون مفتوحة في الفضاء الكلي:

مثل: $u' =]2, 4[$ و $u' \cap A =]2, 4[$

المجموعة المفتوحة u' في الفضاء الجزئي هي مفتوحة في الفضاء الكلي.

* لنأخذ Z مجموعة جزئية من الفضاء R

$u =]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ و $u \cap Z = \{1\}$

- المجموعة وحيدة العنصر هي مجموعة مفتوحة في الفضاء الجزئي Z وليست مجموعة مفتوحة في الفضاء الكلي R.

- أسرة المجموعات وحيدة العنصر تشكل طبولوجيا نسبية وبالتالي الطبولوجيا τ_Z طبولوجيا قوية لأن المجموعات وحيدة العنصر مفتوحة.

- أثر الطبولوجيا العادية على Z هو طبولوجيا قوية

- لنأخذ (X, τ) متقطع، τ. قوية

$\forall x \in A ; \{x\} \in \tau$

لأن $\{x\}$ مجموعة وحيدة العنصر وهي مجموعة مفتوحة أي ان أثر الطبولوجيا القوية طبولوجيا قوية

- لتكن (X, τ) غير متقطع، τ. ضعيفة

$\tau = \{\phi, X\}$

$\tau_A = \{u \cap A ; u \in \tau\} = \{\phi \cap A , X \cap A\} = \{\phi, A\}$

أي ان أثر الطبولوجيا الضعيفة طبولوجيا ضعيفة

* لنأخذ (R, τ) حيث:

$\tau = \{u \subseteq R , 1 \in u\} \cup \{\phi\}$

وليكن لدينا $A =]2, 5[$

$\tau_A = \{u \cap A \; ; \; u \in \tau\}$ طبولوجيا جزئية

لدينا $\forall x \in A$ مجموعة $\{1, x\}$ مفتوحة في الفضاء الكلي

وبالتالي $\{1, x\} \cap A = \{x\}$ مجموعة مفتوحة في الفضاء الجزئي A حسب التعريف،

اي المجموعات وحيدة العنصر في A هي مجموعات مفتوحة وبالتالي الطبولوجيا النسبية

طبولوجيا متقطعة

• لنأخذ (R, τ) حيث:

$$\tau = \{u \subseteq R \; ; \; 1 \in u\} \cup \{\phi\}$$

وليكن لدينا $A = [0, 5]$ $\tau_A = \{u \cap A \; ; \; u \in \tau\}$

* ملاحظة:

كل من Q ، Z ... تحوي الواحد

* لنأخذ (R, τ) حيث:

$$\tau = \{u \subseteq R \; ; \; 1 \in u\} \cup \{\phi\}$$

وليكن لدينا $A = Z$

$$\tau_A = \{u \cap A \; ; \; u \in \tau\}$$

* لنفرض (X, τ) فضاء طبولوجي، A فضاء جزئي من X و $A \subseteq X$ و B مجموعة جزئية

من A ، $B \subseteq A$ و $\tau_A = \{u \cap A \; ; \; u \in \tau\}$

فيمكن ان نزود B طبولوجيا نسبية بطريقتين

- يمكن ان نعرف على الطبولوجيا النسبية طبولوجيا جزئية من A و يبرهن بسهولة:

$$\tau_B = (\tau_A)_B$$

ويبرهن بسهولة ان $\tau_B = (\tau_A)_B$ بسهولة حسب التعريف هو طبولوجيا نسبية

على τ.

لاحظنا ان المجموعات المفتوحة (المغلقة) بالفضاء الجزئي ليس من الضروري ان تكون مجموعة

مفتوحة (مغلقة) في الفضاء الكلي ولكن هنا تختلف إذا كانت المجموعة A مجموعة مفتوحة

بالأصل اي مغلقة

* نتيجة: فضاء طبولوجي جزئي (A, τ_A) مجموعة جزئية طبولوجيا نسبية

ليكن A فضاء جزئيا من فضاء طبولوجي X و B مجموعة جزئية من A ، $B \subseteq A$

ولنفرض A مفتوحة، عندئذ: B مفتوحة في A إذا وفقط إذا كانت B مفتوحة في X

Date : / / Subject:

البرهان:

⇐ نفرض B مفتوحة في A هذا يعني توجد مجموعة مفتوحة في X مثل U بحيث:

بما أن U, A مفتوحتان في X فإن: $U \cap A = B$

⇒ نفرض B مفتوحة في X يكون $B \cap A$ مجموعة مفتوحة في A ⇐ B مفتوحة في A

* والشيء نفسه يقال في حالة A مغلقة

مبرهنة:

ليكن A فضاءً جزئيًا من فضاء طبولوجي X و B مجموعة جزئية من A، $B \subseteq A$ ، $x \in A$

تكون المجموعة B جوارًا للنقطة x في A إذا وفقط إذا وجد جوار V لـ x في X بحيث يكون:

$$V \cap A = B$$

ما ينطبق على المجموعات المفتوحة ينطبق على الجوارات.

البرهان:

نفرض B جوار لـ x في A وبالتالي حسب التعريف توجد مجموعة مفتوحة U في A بحيث

$$x \in U \subseteq B$$

وبالتالي توجد مجموعة مفتوحة مثل G في X بحيث $G \cap A = U$

إن المجموعة $G \cap B = V$ هي جوار للنقطة x في الفضاء الكلي. وتحقق

$$V \cap A = (G \cup B) \cap A$$

$$= G \cap A \cup B \cap A = U \cup B = B$$

⇐ نفرض أن B مجموعة جزئية من A، V جوار لـ x في الفضاء الكلي X بحيث:

$$V \cap A = B$$

بما أن V جوار فيوجد U مجموعة مفتوحة في A

$$x \in U \subseteq V$$

$$x \in \underset{\text{مفتوحة في } A}{U \cap A} \subseteq V \cap A = B$$

وهذا يعني أن B جوار لـ x في A.

• نتيجة:

١- ليكن A فضاء جزئي من الفضاء الطبولوجي X إذا كانت الأسرة $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ جملة الأساسية لجوارات النقطة x في الفضاء الكلي X فإن:

الأسرة $\{U_\alpha \cap A\}_{\alpha \in I}$ تشكل جملة أساسية لجوارات النقطة x في الفضاء الجزئي A

٢- إذا كانت $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ قاعدة للفضاء الكلي X فإن الأسرة $\{V_\alpha \cap A\}_{\alpha \in I}$ قاعدة للفضاء الجزئي A